

Equação do 2º Grau

É toda equação da forma $ax^2 + bx + c = 0$, com a, b e $c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

Exemplos:

a) $x^2 + 4x = 0$

b) $x^2 + 4x + 4 = 0$

c) $x^2 - 9 = 0$

d) $x^2 = 0$

e) $3x^2 + 9x = 0$



Equação do 2º Grau

AULA DE MATEMÁTICA -Prof.

1. Identifique os coeficientes **a**, **b** e **c** de cada equação do 2º grau e classifique-as em completa ou incompleta.

a) $8x^2 - 4x + 1 = 0$

$a = 8 \quad b = -4 \quad c = 1$

completa

b) $5x^2 - \sqrt{5}x - 3 = 0$

$a = 5 \quad b = -\sqrt{5} \quad c = -3$

completa

c) $x = 4x^2$

$-4x^2 + x = 0$

incompleta

$a = -4 \quad b = 1 \quad c = 0$

d) $4x^2 - 12 = 0$

$a = 4 \quad b = 0 \quad c = -12$

incompleta

e) $7x^2 = 0$

$a = 7 \quad b = 0 \quad c = 0$

incompleta

f) $x^2 - 3x = 23$

$x^2 - 3x - 23 = 0$

$a = 1 \quad b = -3 \quad c = -23$

completa

Equação do 2º Grau

AULA DE MATEMÁTICA

2. Indique, entre os valores do conjunto universo, quais são raízes das respectivas equações.

a) $x^2 - 25 = 0$, sendo $U = \{-5, -2, 0, 2, 5\}$

$$(x + 5)(x - 5) = 0$$

$$x + 5 = 0 \Rightarrow x = -5$$

$$x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5$$

b) $x^2 + 3x = 0$, sendo $U = \{-9, -3, 0, 3, 9\}$

$$x(x + 3) = 0$$

$$x = 0$$

$$x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$$

c) $x^2 + 3x - 4 = 0$, sendo $U = \{-4, -1, 0, 1, 4\}$

$$(x + 4)(x - 1) = 0$$

$$x + 4 = 0 \Rightarrow x = -4$$

$$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

d) $x^2 - 2x = 3$, sendo $U = \{-3, -1, 0, 1, 3\}$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$(x - 3)(x + 1) = 0 \Rightarrow x = 3 \text{ e } x = -1$$

Equação do 2º Grau

3) Determine o conjunto solução das equações, sendo $U = \mathbb{R}$.

$$a) x^2 + 9x = 0$$

$$x(x + 9) = 0$$

$$x = 0 \quad x + 9 = 0 \Rightarrow x = -9 \quad S = \{0, -9\}$$

$$b) 4x^2 - 100x = 0$$

$$4x(x - 25) = 0$$

$$4x = 0$$

$$x = 0$$

$$x - 25 = 0$$

$$x = 25$$

$$S = \{0, 25\}$$

4) Qual é o valor de m^4 se $m^3 - 2m^2 = 0$ e m é um número não nulo?

$$m^2(m - 2) = 0$$

$$m^2 = 0$$

$$m - 2 = 0$$

$$m = 0$$

$$m = 2$$

$$2^4 = 16$$

Equação do 2º Grau

AULA DE MATEMÁTICA –Prof. Márcio Barros

5. Calcule o valor de x na equação $4x^2 + 12x + 9 = 0$

$$(2x + 3)^2 = 0 \Rightarrow 2x + 3 = 0 \Rightarrow 2x = -3 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$$

6. Determine os valores de x e y para que

a) o polinômio $x^2y^2 - x^2 - y^2 + 1$ seja nulo.

$$\begin{aligned} x^2(y^2 - 1) - 1(y^2 - 1) = 0 &\Rightarrow (y^2 - 1)(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow y^2 - 1 = 0 \Rightarrow y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm 1 \\ &\quad x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \end{aligned}$$

b) a igualdade $x^2y^2 - 4x^2 - 4y^2 + 16 = 0$ seja verdadeira

$$\begin{aligned} x^2(y^2 - 4) - 4(y^2 - 4) = 0 &\Rightarrow (y^2 - 4)(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow y^2 - 4 = 0 \Rightarrow y^2 = 4 \Rightarrow y = \pm 2 \\ &\quad x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2 \end{aligned}$$

Equação do 2º Grau

Resolução de equações incompletas

1º caso: Equações do tipo $ax^2 + c = 0$, com $a \neq 0$ e $b = 0$

a) $x^2 - 9 = 0$

$x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$

$S = \{-3, +3\}$

b) $x^2 - 3 = 0$

$x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$

$S = \{-\sqrt{3}, +\sqrt{3}\}$

c) $x^2 + 16 = 0$

$x^2 = -16$

$S = \{ \} \text{ ou } \emptyset$



Para toda equação do tipo $ax^2 + c = 0$, as raízes serão simétricas.

Equação do 2º Grau

Resolução de equações incompletas

2º caso: Equações do tipo $ax^2 + bx = 0$, com $a \neq 0$ e $c = 0$

a) $2x^2 + 10x = 0$

$$2x(x + 5) = 0$$

$$2x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$\Rightarrow S = \{0, -5\}$$

$$x + 5 = 0 \Rightarrow x = -5$$

b) $3x^2 - 27x = 0$

$$3x(x - 9) = 0$$

$$3x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$\Rightarrow S = \{0, 9\}$$

$$x - 9 = 0 \Rightarrow x = 9$$

Para toda equação da forma $ax^2 + bx = 0$, uma das raízes será nula.



Equação do 2º Grau

AULA DE MATEMÁTICA –Prof. Márcio Barros

7. Resolva, no conjunto dos números reais, as equações incompletas do segundo grau.

$$a) 4x^2 - 16 = 0$$

$$4x^2 = 16 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

$$S = \{\pm 2\}$$

$$b) 7x^2 + 21x = 0$$

$$7x(x + 3) = 0$$

$$7x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$$

$$S = \{0, -3\}$$

8. Resolva as seguintes equações, sendo $U = \mathbb{R}$.

$$a) 3x^2 - 48 = 0$$

$$b) (2x + 3)(2x - 3) = 135$$

$$c) 4x^2 - 32x = 0$$

$$d) 3(x + 2)(x - 2) = (x - 4)^2 + 8x$$

$$3x^2 = 48$$

$$4x^2 - 9 = 135$$

$$4x(x - 8) = 0$$

$$3(x^2 - 4) = x^2 - \cancel{8x} + 16 + \cancel{8x}$$

$$x^2 = 16$$

$$4x^2 = 144$$

$$4x = 0$$

$$x - 8 = 0$$

$$3x^2 - 12 = x^2 + 16$$

$$x = \pm 4$$

$$x^2 = 36$$

$$x = 0$$

$$x = 8$$

$$2x^2 = 28$$

$$S = \{\pm 4\}$$

$$x = \pm 6$$

$$S = \{0, 8\}$$

$$x^2 = 14$$

$$S = \{\pm\sqrt{14}\}$$

$$S = \{\pm 6\}$$

$$x = \pm\sqrt{14}$$

Equação do 2º Grau

Parte II

Fórmula de Bhaskara



$$\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Resoluções de equações completas

Fórmula de Bhaskara

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$ax^2 + bx = -c \quad (4a)$$

$$4a^2x^2 + 4abx = -4ac$$

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$$

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$

$$2ax + b = \pm \sqrt{b^2 - 4ac} \quad \Rightarrow \quad 2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Equação do 2º Grau

AULA DE MATEMÁTICA –Prof. Márcio Barros

9. Determine as raízes das seguintes equações do 2º grau, aplicando a fórmula de Bhaskara.

$$a) 2x^2 - x - 10 = 0$$

$$a = 2 \quad b = -1 \quad c = -10$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4.2.(-10)$$

$$\Delta = 1 + 80$$

$$\Delta = 81$$

$$\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow \frac{1 \pm 9}{4} \Rightarrow \begin{cases} \frac{10}{4} = \frac{5}{2} \\ -\frac{8}{4} = -2 \end{cases}$$

$$S = \left\{ \frac{5}{2}, -2 \right\}$$

$$b) 3x^2 + 11x - 4 = 0$$

$$a = 3 \quad b = 11 \quad c = -4$$

$$\Delta = (11)^2 - 4.3.(-4)$$

$$\Delta = 121 + 48$$

$$\Delta = 169$$

$$\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow \frac{-11 \pm 13}{6} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \\ \frac{-24}{6} = -4 \end{cases}$$

$$S = \left\{ \frac{1}{3}, -4 \right\}$$

Equação do 2º Grau

AULA DE MATEMÁTICA – Prof. Márcio Barros

10. Calcule o discriminante e determine se as raízes das equações do 2º grau a seguir pertencem ao conjunto dos números reais. Depois, determine em $\mathbb{R}$ o conjunto solução de cada equação.

$$a) x^2 - 7x + 6 = 0$$

$$a = 1 \quad b = -7 \quad c = 6$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-7)^2 - 4.1.(6)$$

$$\Delta = 49 - 24$$

$$\Delta = 25$$

$$\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow \frac{7 \pm 5}{2}$$

$x' = \frac{12}{2} = 6$
 $x'' = \frac{2}{2} = 1$

$$S = \{1, 6\}$$

$$b) x^2 - 20x + 100 = 0$$

$$a = 1 \quad b = -20 \quad c = 100$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-20)^2 - 4.1.(100)$$

$$\Delta = 400 - 400$$

$$\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow -\frac{b}{2a} = \frac{20}{2} = 10$$

$$S = \{10\}$$

$$c) 6x^2 + x - 1 = 0$$

$$a = 6 \quad b = 1 \quad c = -1$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (1)^2 - 4.6.(-1)$$

$$\Delta = 1 + 24$$

$$\Delta = 25$$

$x' = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$
 $x'' = \frac{-6}{12} = -\frac{1}{2}$

$$\frac{-1 \pm 5}{12}$$

$$S = \left\{\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}\right\}$$

$$d) x^2 - 4x + 5 = 0$$

$$a = 1 \quad b = -4 \quad c = 5$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-4)^2 - 4.1.(5)$$

$$\Delta = 16 - 20$$

$$\Delta = -4$$

$$S = \{ \}$$

Equação do 2º Grau

AULA DE MATEMÁTICA –Prof. Márcio Barros

11. Decomponha o número 204 em um produto de dois números naturais cuja a soma seja 29.

$$x(29 - x) = 204$$

$$29x - x^2 = 204 \Rightarrow -x^2 + 29x - 204 = 0 \Rightarrow x^2 - 29x + 204 = 0$$

$$a = 1 \quad b = -29 \quad c = 204$$

$$\Delta = (-29)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (204)$$

$$\Delta = 841 - 816$$

$$\Delta = 25$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x' = \frac{34}{2} = 17$$

$$\frac{29 \pm 5}{2}$$

$$x'' = \frac{24}{2} = 12$$

12. Um retângulo tem dimensões 6 cm x 4 cm. Deseja-se aumentar essas medidas de modo que a área dessa figura passe a ter 143 cm². Quantos centímetros devem ser expandidos a cada lado do retângulo, sabendo que se quer aumentar a mesma metragem no comprimento e na largura, mantendo, assim, a sua forma retangular?



$$6 + x$$

$$4 + x$$

$$(x + 4)(x + 6) = 143$$

$$x^2 + 10x + 24 - 143 = 0$$

$$x^2 + 10x - 119 = 0$$

$$(x + 17)(x - 7) = 0$$

$$x' = -17 \quad x'' = 7$$

Equação do 2º Grau

13. Determine o valor da maior raiz da equação $2x^2 + 3x + 1 = 0$.

$$a = 2 \quad b = 3 \quad c = 1$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (1) \Rightarrow \Delta = 9 - 8 \Rightarrow \Delta = 1$$

$$\frac{-3 \pm 1}{4}$$

$$x'' = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$x'' = \frac{-4}{4} = -1$$

Logo, a maior raiz é $-\frac{1}{2}$.

14. Desvende a charada que Renata apresentou à sua amiga: "Determine o valor de x sabendo que o seu quadrado aumentado do seu dobro é igual a 15 e que x é um número natural".

$$x^2 + 2x = 15 \Rightarrow x^2 + 2x - 15 = 0 \Rightarrow (x + 5)(x - 3) = 0 \Rightarrow x' = -5 \quad x'' = 3$$

Equação do 2º Grau

AULA DE MATEMÁTICA –Prof. Márcio Barros

15. Calcule as medidas dos lados das figuras a seguir, sabendo que, em cada item, os pares de quadriláteros têm áreas iguais.

a)



$$3x - 1$$



$$x + 1$$

$$2x$$

$$(3x - 1) \cdot x = 2x(x + 1) \Rightarrow 3x^2 - x = 2x^2 + 2x \Rightarrow x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x(x - 3) = 0$$

$$x' = 0$$

$$x - 3 = 0$$

$$x = 3$$

AULA DE MATEMÁTICA –Prof. Márcio Barros

16. Resolva o que se pede.

I. Para que valores de m a equação $(2m - 18)x^2 + 6x - 1 = 0$ é do 2º grau?

$$2m - 18 \neq 0 \Rightarrow 2m \neq 18 \Rightarrow m \neq 9$$

II. Determine os valores reais de k para cada uma das equações do 2º grau com incógnita x , de modo que a equação não seja incompleta.

a) $3x^2 - 2x + k - 2 = 0$

$$k - 2 \neq 0$$

$$k \neq 2$$

b) $x^2 + (k + 3)x - 9 = 0$

$$k + 3 \neq 0$$

$$k \neq -3$$

Equação do 2º Grau

AULA DE MATEMÁTICA –Prof. Márcio Barros

17. Nas equações seguintes, x representa um número real. Determine o conjunto solução das equações.

$$a) -x^2 + 9x - 20 = 0$$

$$x^2 - 9x + 20 = 0$$

$$a = 1 \quad b = -9 \quad c = 20$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-9)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 20$$

$$\Delta = 81 - 80$$

$$\Delta = 1$$

$$\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x' = \frac{9+1}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

$$x'' = \frac{9-1}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$S = \{4, 5\}$$

$$b) 3x^2 - 4x + 2 = 0$$

$$a = 3 \quad b = -4 \quad c = 2$$

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2$$

$$\Delta = 16 - 24$$

$$\Delta = -8$$

$$S = \{ \}$$

$$c) (3 - 2x)^2 - 4(6 - x) + 3x = -9$$

$$9 - 12x + 4x^2 - 24 + 4x + 3x + 9 = 0$$

$$4x^2 - 5x - 6 = 0$$

$$a = 4 \quad b = -5 \quad c = -6$$

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-6)$$

$$\Delta = 25 + 96$$

$$\Delta = 121$$

$$x' = \frac{5+11}{8} = \frac{16}{8} = 2$$

$$x'' = \frac{5-11}{8} = -\frac{6}{8} = -3/4$$

$$S = \left\{ 2, -\frac{3}{4} \right\}$$

Equação do 2º Grau

$$d) \frac{x(4x-1)}{6} - \frac{(2-x)^2}{9} = \frac{4x^2+3x+1}{9}$$

$$3x(4x-1) - 2(2-x)^2 = 8x^2 + 6x + 2 \quad \Rightarrow \quad 12x^2 - 3x - 2(4 - 4x + x^2) = 8x^2 + 6x + 2$$

$$12x^2 - 3x - 8 + 8x - 2x^2 = 8x^2 + 6x + 2 \quad \Rightarrow \quad 10x^2 + 5x - 8 = 8x^2 + 6x + 2 \quad \Rightarrow \quad 2x^2 - x - 10 = 0$$

$$a = 2 \quad b = -1 \quad c = -10$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-10) \quad \Rightarrow \quad \Delta = 1 + 80 \quad \Rightarrow \quad \Delta = 81 \quad \Rightarrow$$

$$x' = \frac{1+9}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

$$x'' = \frac{1-9}{4} = -\frac{8}{4} = -2$$

$$\Rightarrow S = \left\{ \frac{5}{2}, -2 \right\}$$

Equação do 2º Grau

18. Determine para quais valores de m a equação $x^2 + (3m - 9)x - 25 = 0$ apresenta como raízes dois números simétricos.

$$3m - 9 = 0 \Rightarrow 3m = 9 \Rightarrow m = 3$$

19. Considere a equação $\frac{3x^3 + x}{x + 1} + \frac{3x^2}{x - 1} = \frac{x(13x - 1)}{x^2 - 1}$

a) Determine o conjunto universo dessa equação.

$$U = \mathbb{R} - \{1, -1\}$$

b) Resolva essa equação.

$$\frac{3x^3 + x}{x + 1} + \frac{3x^2}{x - 1} = \frac{x(13x - 1)}{x^2 - 1}$$

$$(3x^3 + x)(x - 1) + 3x^2(x + 1) = x(13x - 1) \Rightarrow 3x^4 - \cancel{3x^3} + x^2 - \cancel{x} + \cancel{3x^3} + 3x^2 = 13x^2 - \cancel{x}$$

$$\Rightarrow 3x^4 - 9x^2 = 0 \Rightarrow 3x^2(x^2 - 3) = 0 \Rightarrow 3x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3} \Rightarrow S = \{0, \pm\sqrt{3}\}$$

Equação do 2º Grau